极小超曲面的 Bernstein 型问题

沈东睿
指导老师: 张世金

北京航空航天大学
2020 年 6 月 4 日

课题背景

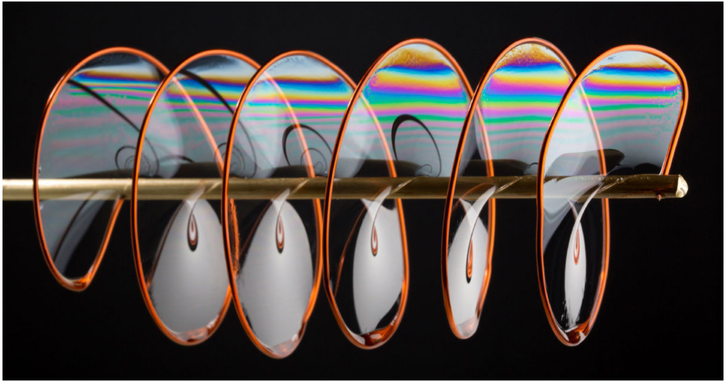

图: Ted Kinsman/Science Source

课题背景

极小曲面在自然界中广泛存在，是一类非常重要的曲面，关于极小曲面的一个背景是经典 Plateau 问题。

问题 (经典 Plateau 问题)

给定空间中一条可求长的简单闭曲线 C，是否存在一个以 C 为边界的曲面 Σ，它在所有以 C 为边界的曲面中面积最小？

- 1760 年，Lagrange 将极小曲面与曲面面积的变分问题联系起来，首次给出极小曲面方程。
$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0, \tag{1}$$
- 1776 年，Meusnier 给出极小曲面方程的几何解释：满足极小曲面方程的函数决定的图，平均曲率 H 为零。

课题背景

- 1915 年，Bernstein 证明了：如果定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数图是 $\mathbb{R}^3$ 中的极小曲面，那么这个函数一定是线性的。这一结论在高维情形下是否成立的问题被命名为 Bernstein 问题。

问题 (Bernstein 问题)

如果定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数图是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小曲面，那么这个函数是否必然是线性的？

将极小图的概念推广到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中，得到极小超曲面方程

$$(1+|\nabla f|^2)\sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} - \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \tag{2}$$

课题背景

经典 Bernstein 问题中，仅考虑了极小曲面是函数图的情况。观察极小图的法向量场发现：极小图的高斯像一定包含在 S^2 的某个开半球中，据此 Nirenberg 提出猜想。

猜想 (Nirenberg 猜想)

如果完备极小曲面的高斯像在 S^2 中不是处处稠密的，那么该曲面为平面。

1959 年，Osserman[11] 证明了 Nirenberg 猜想，并由此开始了对完备极小曲面高斯像值分布的研究。Osserman[12]，Xavier[18] 和 Fujimoto[7] 先后的工作解决了 $\mathbb{R}^3$ 中完备极小曲面高斯像的值分布问题。1982 年，丘成桐在总结了他们的工作之后，进一步提出问题。

问题 (丘成桐 [20], 1982)

是否能将 $\mathbb{R}^3$ 中完备极小曲面高斯像值分布问题的相关结论推广到极小超曲面上？

毕设情况

毕设目标

- 学习经典理论
- 综述研究进展

论文构成

- 绪论
- 极小曲面的预备知识
- Bernstein 问题
- 极小曲面高斯像的值分布问题

毕设情况

中期之后的主要工作

- 完成几个极小曲面例子的计算和绘图
- 用 Osserman[12] 的方法构造高斯像缺少 4 个点和 3 个点的完备极小曲面
- 学习椭圆方程的 Liouville 定理的证明
- 了解 Bernstein 定理在广义极小曲面和极小超曲面上的推广
- 了解丘成桐问题的研究进展

预备知识

- Liouville 定理

定理 (解析函数的 Liouville 定理 [17])

假设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是整函数，如果存在一个正常数 C，使得 $|f(z)|\leq C$，那么函数 f 一定是常数。

定理 (椭圆方程的 Liouville 定理 [14])

假设函数 u 是 (x,y)-平面上的次调和函数，即 $\Delta u\geq 0$，如果存在一个正常数 C，使得 $u(x,y)\leq C$，那么函数 u 一定是常数。

预备知识

椭圆方程的 Liouville 定理的证明基于 Hadamard 三圆定理和强极大值原理。

引理 (Hadamard 三圆定理 [14])

考虑圆盘 $\delta(R_1), \delta(R_2), R_1 < R_2$ 组成的环形区域 D，u 是 D 上的次调和函数。令 $u(x, y)$ 为区域 D 上的次调和函数，用 $M(r)$ 表示函数 u 在半径为 r 的圆上的最大值，那么对 $r_1 < r < r_2$ 有

$$M(r) < \frac{M(r_1)\log(r_2/r) + M(r_2)log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}. \tag{3}$$

预备知识

- 极小曲面的 Weierstrass 表示

设 D 是单位圆盘 $|\zeta| < 1$ 或 ζ-平面 $|\zeta| < \infty$，f, g 分别是 D 上的全纯函数和亚纯函数，f 的零点是 g 的极点，并且 f 的零点阶数是 g 的极点阶数的二倍。那么

$$x_k(\zeta) = \mathrm{Re} \int \phi_k(\zeta) d\zeta \tag{4}$$

定义了一个极小曲面。其中

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2} f(1 - g^2), \\ \phi_2 &= \frac{i}{2} f(1 + g^2), \\ \phi_3 &= fg. \end{aligned} \tag{5}$$

预备知识

(4)定义的极小曲面的单位法向量 N 为

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{2\operatorname{Re} g}{1+|g|^2}, \frac{2\operatorname{Im} g}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{1+|g|^2}\right), \tag{6}$$

当 $f=0$ 或 $g=\infty$ 时，极小曲面 M 在相应点处的法向量指向 x_3-正半轴。[12]

这意味着，g 是高斯映射和球极投影的复合映射，极小曲面 M 的缺少某个方向的法向量等价于函数 g 缺少特定的像值。

极小曲面的例子

- 平面：$z = \mathrm{const}$，$f = 1, g = 0$
- 螺旋面：$z = \arctan \frac{y}{x}$，$f = 1, g = 1/z$
- 悬链面：$z = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$，$f = i, g = 1/z$
- Enneper 曲面：$f = 1, g = z$
- Scherk 第一曲面：$z = \ln \frac{\cos x}{\cos y}$，$f = \frac{1}{1-z^4}, g = z$
- Scherk 第二曲面：$z = \arcsin \frac{\sinh x}{\sinh y}$，$f = \frac{1}{1-z^4}, g = iz$

极小曲面的例子

图: 螺旋面

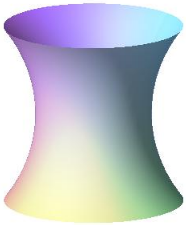

图: 悬链面

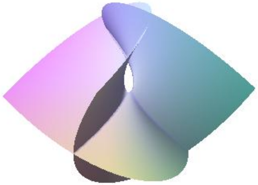

图: Enneper 曲面

极小曲面的例子

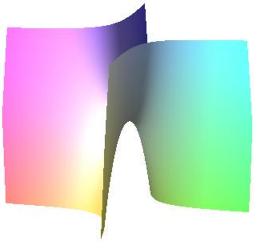

图: Scherk 第一曲面

图: Scherk 第二曲面

构造高斯像缺少四个点的完备极小曲面

定理 (Osserman[12], 1961)

存在完备单连通极小曲面 M，其高斯像恰好缺少 S^2 上的四个点。

构造思路：

- 取 z-平面上区域 $D := \{z \in C : z \neq 2\pi n i, \forall n \in \mathbb{N}\}$；
- 定义 D 上的函数 $G(z) = \frac{1}{1-e^z}$，那么函数 G 取不到 0，1，∞；
- 取 D 的万有覆盖 $\bar{D}$，$\pi : \bar{D} \to D$；
- 根据单值化定理，$\bar{D}$ 共形等价于单位圆盘 $|\zeta| < 1$，记为 $\Phi : |\zeta| < 1 \to \bar{D}$；
- 作复合映射 $F(\zeta) = \pi(\Phi(\zeta))$；
- $f(\zeta) = F'(\zeta) \neq 0$，$g(\zeta) = [G(F(\zeta))]^{1/2}$，$f, g$ 确定了一个完备极小曲面，其高斯像恰好缺少四个点。取 $g = G(F(\zeta))$，可以构造出高斯像缺少三个点的完备极小曲面。

Bernstein 问题

定理 (Bernstein 定理)

如果定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数图是 $\mathbb{R}^{n+1}, n \leq 7$ 中的极小曲面，那么该函数一定是线性函数。

- 1962 年，Fleming[6] 利用 $\mathbb{R}^2$ 中没有非平面的面积最小化锥给出 Bernstein 定理的新证明。
- 1965 年，De Giorgi[4] 证明了如果 $\mathbb{R}^n$ 中没有非平面的面积最小化锥，那么 Bernstein 定理在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中成立。此外，他还证明了 Bernstein 定理在 $n = 3$ 时成立。
- 1966 年，Almgren[1] 证明了 Bernstein 定理在 $n = 4$ 时成立。
- 1968 年，Simons[15] 证明了 Bernstein 定理在 $n = 7$ 时成立。
- 1969 年，Bombieri-De Giorgi-Giusti[2] 构造出了 $\mathbb{R}^{n+1}, n \geq 8$ 中的反例。

极小曲面高斯像的值分布问题

Osserman，Xavier 和 Fujimoto 先后的工作解决了 $\mathbb{R}^3$ 中极小曲面高斯像的值分布问题。

定理 (Osserman[11], 1959)

任取 $\mathbb{R}^3$ 中的完备单连通极小曲面 M，如果 M 的高斯像在 S^2 不是处处稠密的，那么 M 是平面。

引理

取曲面 M，设 M 的诱导度量完备并且高斯曲率 $K \leq 0$。假设存在 M 上的函数 f 满足：

(i) $\Delta_M \log f = K$;

(ii) $f \geq \varepsilon > 0$,

那么 $K \equiv 0$。

极小曲面高斯像的值分布问题

定理 (Xavier[18], 1981)

$\mathbb{R}^3$ 中非平坦完备极小曲面的高斯像至多缺少 S^2 上的 6 个点。

引理 (Yau[18],1976)

设函数 $f\,(\Delta \log u = f)$ 有下界，*Lebesgue* 可积，并满足 $0 < \int_M f \leq \infty$，那么

$$\int_M u^p = \infty, \forall p > 0,$$

除非 u 是常数。如果 f 几乎处处为 0，结论也成立。

极小曲面高斯像的值分布问题

定理 (Fujimoto[7], 1988)

$\mathbb{R}^3$ 中非平坦完备极小曲面的高斯像至多缺少 S^2 上的 4 个点。

引理

令 M 为 $\mathbb{R}^m, m \geq 3$ 上的极小曲面。假设高斯映射 $G : M \to S^2$ 的像缺少至少 5 个点 $\alpha_i, i = 1, \ldots, 5$，那么存在一个只与 $\alpha_i, i = 1, \ldots, 5$ 有关的正常数 C 使得

$$|K(p)| \leq \frac{C}{d(p)^2}$$

对 M 上的任意点 p 都成立。

丘成桐问题

1988 年，丘成桐重申了他的问题，并指出很长时间以来 Solomon 的工作是这个方向上的唯一结果。

定理 (Solomon[16], 1984)

如果 S 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中整体体积极小的超曲面，$\partial S = 0$，$\mathrm{Reg}(S)$ 的第一 *Betti* 数为零，并且 S 的高斯像缺少 S^{n-2} 在 S^n 中的管状邻域，那么 $\mathrm{spt}\ S$ 的各个分量都是超平面。

丘成桐问题

1992 年，丘成桐又提出新的问题。

问题 (丘成桐 [19], 1992)

是否能够通过减弱 *Solomon* 定理中的两个条件来对 *Solomon* 的结果进行推广？

Ding 在 [5] 中指出，通过 Simons 锥的例子，Solomon 定理中关于第一 Betti 数的条件是必要的。

丘成桐问题

2012 年，Jost-Xin-Yang 发现了 S^n 的一个开极大凸支撑子集 $S^n \setminus \bar{S}^{n+1}_+$，作为研究中结论的一个应用，得到了如下 Bernstein 型定理。

定理 (Jost-Xin-Yang[9], 2012)

令 M 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维完备嵌入极小超曲面，并且满足欧氏体积增长。假设存在正常数 C，使得对任意 $y \in M$，$R > 0$，*Neumann-Poincaré* 不等式

$$\int_{M \cap B_R(y)} |v - \bar{v}_{R,y}|^2 \leq CR^2 \int_{M \cap B_R(y)} |\nabla v|^2$$

对任意函数 $v \in C^\infty(B_R(y))$ 成立，这里 $B_R(y)$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中以 y 为球心，R 为半径的球，$\bar{v}_{R,y}$ 表示 v 在球 $B_R(y)$ 上的平均值。
如果该曲面的高斯像缺少 $\bar{S}^{n+1}_+$ 中的一个邻域，那么 M 一定是仿射线性空间。

丘成桐问题

上述定理中，Neumann-Poincaré 不等式这一条件的必要性是不确定的。2019 年，Ding 去掉了这一条件，加上可定向的条件，得到了如下 Bernstein 型定理。

定理 (Ding[5], 2019)

令 M 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中可定向的 n 维完备嵌入极小超曲面，并且满足欧氏体积增长。如果该曲面的高斯像缺少 $\bar{S}_{+}^{n+1}$ 中的一个邻域，那么 M 一定是仿射超平面。

参考文献

[1] Frederick J Almgren.
Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of bernstein's theorem.
Annals of Mathematics, pages 277–292, 1966.

[2] E Bombieri, E De Giorgi, and E Giusti.
Minimal cones and the bernstein problem.
Ennio De Giorgi, page 291, 1969.

[3] Shiing-shen Chern and Robert Osserman.
Complete minimal surfaces in euclideann-space.
Journal d'Analyse Mathématique, 19(1):15–34, 1967.

参考文献

[4] Ennio De Giorgi.
Una estensione del teorema di bernstein.
Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Ser. 3, 19(1):79–85, 1965.

[5] Qi Ding.
A bernstein type theorem for minimal hypersurfaces via gauss maps.
Journal of Functional Analysis, page 108469, 2020.

[6] Wendell H Fleming.
On the oriented plateau problem.
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 11(1):69–90, 1962.

参考文献

[7] Hirotaka Fujimoto.
On the number of exceptional values of the gauss maps of minimal surfaces.
Journal of the Mathematical Society of Japan, 40(2):235–247, 1988.

[8] Albin Ingelström.
On the weierstrass-enneper representation of minimal surfaces, 2017.

[9] Jűrgen Jost, Yuanlong Xin, Ling Yang, et al.
The regularity of harmonic maps into spheres and applications to bernstein problems.
Journal of Differential Geometry, 90(1):131–176, 2012.

参考文献

[10] Jürgen Moser.
On harnack's theorem for elliptic differential equations.
Communications on Pure and Applied Mathematics, 14(3):577–591, 1961.

[11] Robert Osserman.
Proof of a conjecture of nirenberg.
Communications on Pure and Applied Mathematics, 12(2):229–232, 1959.

[12] Robert Osserman.
Minimal surfaces in the large.
Commentarii Mathematici Helvetici, 35(1):65–76, 1961.

参考文献

[13] Robert Osserman.
A survey of minimal surfaces.
Courier Corporation, 2013.

[14] Murray H Protter and Hans F Weinberger.
Maximum principles in differential equations.
Springer Science & Business Media, 2012.

[15] James Simons.
Minimal varieties in riemannian manifolds.
Annals of Mathematics, pages 62–105, 1968.

参考文献

[16] Bruce Solomon et al.
On the gauss map of an area-minimizing hypersurface.
Journal of Differential Geometry, 19(1):221–232, 1984.

[17] Elias M Stein and Rami Shakarchi.
Complex analysis, volume 2.
Princeton University Press, 2010.

[18] Frederico Xavier.
The gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere.
Annals of Mathematics, pages 211–214, 1981.

参考文献

[19] Shing-Tung Yau.
Open problems in geometry, chern–a great geometer of the twentieth century (1992), 275–319.
International Press.

[20] Shing-Tung Yau.
Seminar on differential geometry.
Number 102. Princeton University Press, 1982.

[21] 彭家贵，陈卿.
微分几何.
高等教育出版社, 2002.

参考文献

[22] 忻元龙.
极小曲面 gauss 像的值分布.
中国科学, 048(006):P.843–848, 2018.